

Essential Skills Mathematics

Studiewijzer

MODULE M1

Meetkunde

0 Leerdoelen en onderwerpen

Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben kun je:

- aan de hand van de stelling van Pythagoras een van de onbekende zijdes in een rechthoekige driehoek berekenen.
- de afstand tussen twee punten berekenen
- sinus- en cosinusregels binnen een willekeurige driehoek toepassen om een onbekende zijde en/of hoek te berekenen;
- de afstand tussen een punt en een lijn berekenen;
- hoeken (o.a. de kleinste hoek) tussen de lijnen m.b.v. tangens regel en/of richtingscoëfficiënt bepalen;

Onderwerpen

1. Stelling van Pythagoras
2. Cosinusregel
3. Sinusregel
4. Het berekenen van de afstand van een punt tot een lijn.
5. Hoeken tussen lijnen

1. Euclidische afstand

In deze module komen de euclidische afstand tussen meetkundige objecten aan bod. De euclidische afstand tussen twee objecten (bijvoorbeeld de afstand tussen 2 lijnen of de afstand tussen een lijn en een cirkel) wordt gedefinieerd als de **korste verbindingsweg tussen deze twee objecten**

Als eerste gaan we de afstand tussen 2 punten in het xy-vlak (het Cartesisch assenstelsel) berekenen.

Voordat we dit doen, moet er eerst voorkennis die we nodig hebben, opgefrist worden.

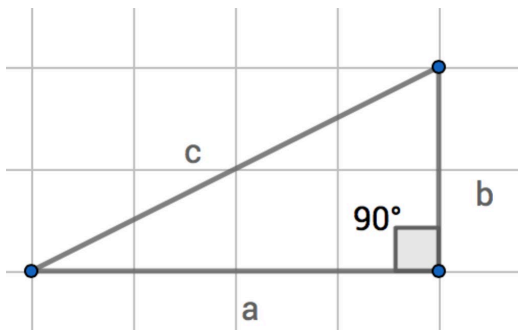
1.0. De stelling van Pythagoras

We nemen eerst een rechthoekige driehoek onder de loep.

Met een rechthoekige driehoek wordt een rechthoek bedoeld waarbij een van de hoeken gelijk is aan 90° .

Bij zulke driehoeken bestaat er een hele overzichtelijk relatie tussen de lengtes van de zijden die bekend staat als de stelling van Pythagoras.

Stel dat we een rechthoekige driehoek hebben met zijden a, b, c , zie *Figuur 1.1*



Figuur 1.1 Rechthoekige driehoek

De stelling van Pythagoras zegt dat in een rechthoekige driehoek de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de hypotenusa (schuine zijde):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Voorbeeld 1.

Gegeven is een rechthoekige driehoek met twee rechthoekszijden $a = 4$ en $b = 2$. Wat is de lengte van de schuine zijde c (wordt hypotenusa genoemd)?

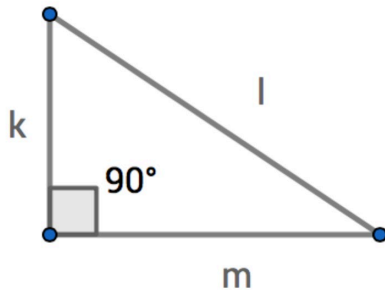
Door het toepassen van de formule komt er volgende uit:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$\text{Dus } c = \sqrt{20} \approx 4,47$$

Voorbeeld 2.

Gegeven is een rechthoekige driehoek met rechthoekzijde $k = 2$, en een hypotenusa l die gelijk is aan $3,6$. Bereken de lengte van de andere rechthoekzijde m . Zie *Figuur 1.2*



Bij het toepassen van de stelling van Pythagoras komen we op de volgende formule:

$$k^2 + m^2 = l^2$$

$$m^2 = l^2 - k^2$$

$$m = \sqrt{l^2 - k^2}$$

Figuur 1.2. Driehoek uit voorbeeld 2.

De berekening kan nu uitgevoerd worden, want k en l zijn bekend:

$$m = \sqrt{(3,6)^2 - 2^2} = \sqrt{12,96 - 4} = \sqrt{8,96} \approx 3$$

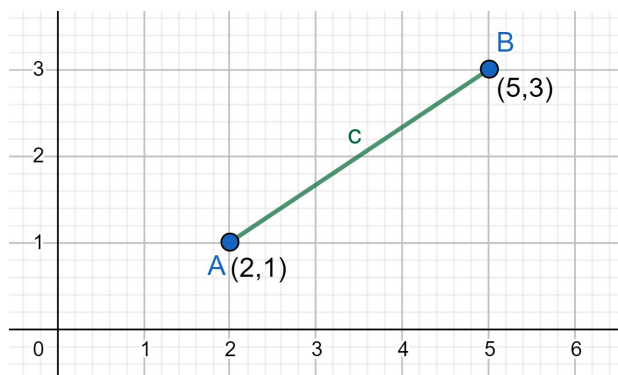
1.1. De euclidische afstand tussen 2 punten

We gaan nu de stelling van Pythagoras gebruiken om de afstand tussen twee punten in het xy-assenstelsel te berekenen.

Elk punt A in het xy-vlak wordt voorgesteld door coördinaten met een x -en y-coördinaat. We noteren dit als $A(x_A, y_A)$.

De afstand tussen twee punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ is de lengte van het kortste lijnstuk tussen A en B.

Voorbeeld Laten we als voorbeeld de punten $A(2,1)$ en $B(5,3)$ nemen, zie *Figuur 1.3*.



Figuur 1.3

Er zijn vele routes mogelijk van A naar B. De kortste verbinding is de rechte groene lijn die rechtstreeks van A naar B loopt.

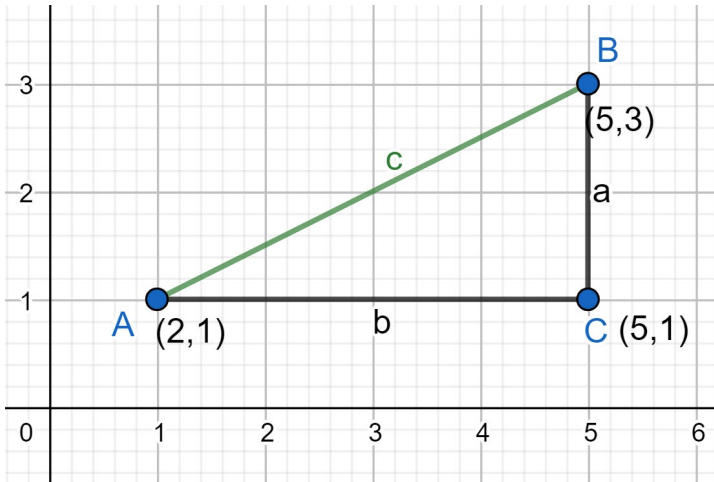
Zoals eerder aangegeven wordt onder de afstand tussen A en B de kortste verbindingsweg bedoeld tussen A en B.

We noteren dit als $d(A,B)$

De afstand tussen A en B is dus de lengte van lijnstuk AB, notatie $|AB|$

We willen dus de lengte van het groene lijnstuk weten, aangegeven met c

Om c uit te rekenen kunnen we nu gebruik maken van de stelling van Pythagoras die we hiervoor behandeld hebben. Kijk naar *Figuur 1.4a*.



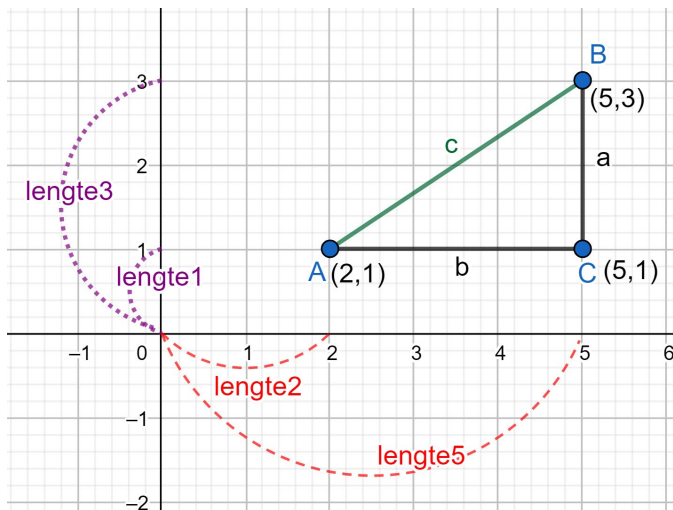
Figuur 1.4a

We weten uit de stelling van Pythagoras dat $a^2 + b^2 = c^2$

Nu moeten we nog achter zien te komen wat de lengte van lijnstuk AC (notatie $|AC|$) en de lengte van lijnstuk BC (notatie $|BC|$) is, oftewel wat b en a zijn.

Dus $|AC| = b$ en $|BC| = a$

Merk op dat C(5,1) dezelfde x-coördinaat (dat is 5) heeft als B(5,3), dus $x_C = x_B$. Merk ook op dat C(5,1) dezelfde y-coördinaat (dat is 1) heeft als A(2,1), dus $y_C = y_A$

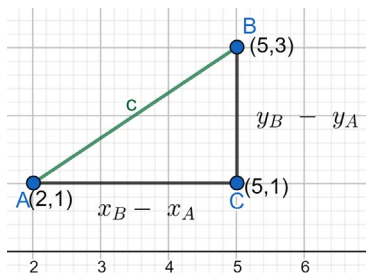


Figuur 1.4b

Als men kijkt naar *Figuur 1.4b*, dan is te zien dat lijnstuk AC ofwel b gelijk is aan $5 - 2 = 3$ oftewel $x_C - x_A$. Omdat $x_C = x_B$ kunnen we dus noteren $b = x_B - x_A = 3$

Ook is te zien dat lijnstuk BC ofwel a gelijk is aan $3 - 1 = 2$. Oftewel $y_B - y_C$. Omdat $y_C = y_A$ kunnen we dan noteren $a = y_B - y_A = 2$

Zie *Figuur 1.4c* waarin deze informatie is verwerkt:



Afbeelding 1.4c

Passen we Pythagoras toe: $c^2 = a^2 + b^2$

dan is $c = \sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ dus $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oftewel $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Omdat $b = x_B - x_A = 3$ en $a = y_B - y_A = 2$ hadden we $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ook op de volgende manier mogen schrijven:

$$c = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Uit het bovenstaande voorbeeld kunnen we de algemene berekening herleiden.

Gegeven 2 punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ in het xy-vlak.

Dan is de afstand $d(A, B)$ tussen A en B als volgt te berekenen:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Cosinus regel

Voordat het hoofdstuk begint, doen we hier melding van de volgende (voor)kennis die gebruikt wordt:

- In elke driehoek $\triangle ABC$ met hoeken α , β en γ geldt dat de som van de hoeken gelijk is aan 180° :
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- De functies $\arccos x$ en $\arcsin x$ en $\arctan x$ worden gebruikt.
 $\arccos(x)$ is de inverse van $\cos(x)$, de functie die als het ware $\cos(x)$ opheft, het “omgekeerde” van $\cos(x)$. Je stopt er dus getallen in en krijgt er graden uit. Hetzelfde geldt voor $\arcsin(x)$.
We hebben dit al eerder gezien in module E1 met de functies g^x en $\log x$.

LET OP: Op de (grafische)rekenmachine staan de functies $\arccos$ of $\arcsin$ of $\arctan$ niet vermeld. Ze zijn er wel. Je vindt ze onder de toetsen: $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ en $\tan^{-1}$

- **Uitspraak:**
 - α , spreek uit als alfa
 - β , spreek uit als bed ta. Spreek de d niet uit.
 - γ , spreek uit als gamma

We hebben al eerder gezien in paragraaf 1.0 dat we het volgende over de hoeken en zijden kunnen zeggen van een rechthoekige driehoek $\triangle ABC$:
Één hoek is 90° en de lengten van de zijden voldoen aan de volgende relatie: $c^2 = a^2 + b^2$

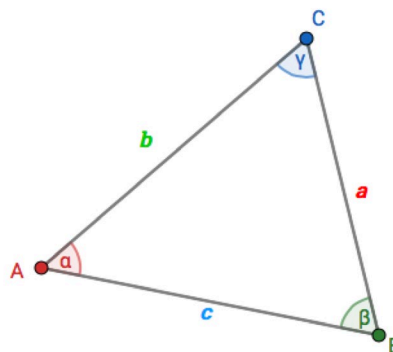
In een willekeurige driehoek die niet perse een rechte hoek heeft, zijn er ook uitspraken te doen over de hoeken en de zijden. De stelling van Pythagoras is dan niet van toepassing maar wel een aangepaste vorm. Dus $c^2 = a^2 + b^2$ is dan wel niet geldig. Er is een correctie nodig om het geldig te maken.

Deze aangepaste vorm staat bekend onder de **cosinusregel** en luidt als volgt:
De **cosinusregel** voor een driehoek met zijdes **a**, **b** en **c** en een hoek **γ** , die tegenover zijde **c** ligt, ziet als volgt uit:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos \gamma$$

De **cosinusregel** voor de andere twee zijdes wordt op dezelfde manier opgesteld (bestudeer *Figuur.2.1* om het verband te vinden):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos \beta$$



Figuur.2.1. driehoek $\triangle ABC$

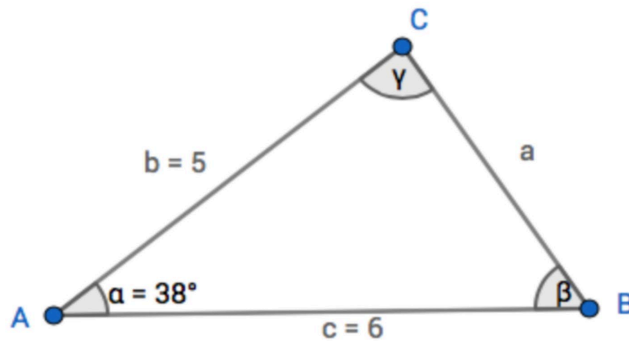
Met behulp van de cosinusregel kunnen berekend worden:

- a) een onbekende zijde als de andere twee zijden en de hoek er tussen gegeven zijn;
- b) een hoek, als alle drie zijdes bekend zijn.

Laten we naar 2 voorbeelden kijken.

Voorbeeld 1.

In een driehoek $\triangle ABC$ (zie *Figuur 2.2*) zijn de volgende twee zijden bekend: $b = 5$ en $c = 6$. Verder wordt gegeven dat $\alpha = 38^\circ$ is. Bereken de lengte van zijde a .



Figuur 2.2

Hier kan de cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ toegepast worden.

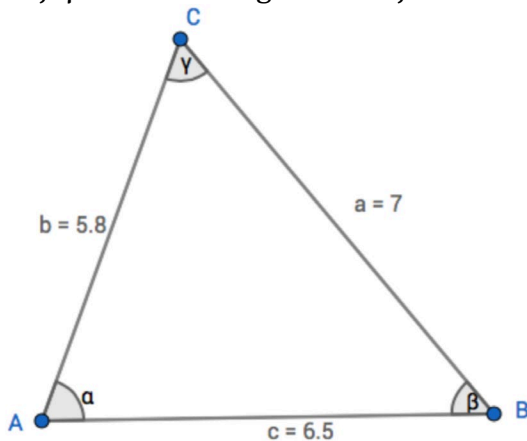
$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 38^\circ = 25 + 36 - 60 \cdot \cos 38^\circ$$
$$a^2 = 61 - 60 \cdot 0,788 \dots = 61 - 47,28 = 13,72$$

Trek de wortel: $a = \sqrt{13,72} \approx 3,70$

Het antwoord is dus dat zijde a gelijk is aan 3,70.

Voorbeeld 2.

Gegeven is een driehoek $\triangle ABC$, met zijden: $a = 7$, $b = 5,8$ en $c = 6,5$. Bereken $\cos \gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c . Zie *Figuur 2.3*



Figuur 2.3.

Hier is het handig om gebruik te maken van de cosinusregel voor de zijde c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos \gamma$$

Hieruit kunnen we een formule voor **cos γ** afleiden. Door de juiste bewerkingen kunnen we het herschrijven en ervoor zorgen dat **c²** rechts van de "=" en "**2ab * cos γ**" aan de linkerkant komt te staan:

$$2ab * \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

Laatste stap is om cos (γ) vrij van 2ab te maken en we krijgen een formule voor de hoek:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Aan de hand van de formule en de gegevens kan cos (γ) berekend worden:

In de berekening hieronder gebruiken we een nieuwe functie, namelijk de arccos(x).

Arccos(x) is de inverse van cos(x), de functie die als het ware cos(x) opheft, het "omgekeerde" van cos(x). Je stopt er dus getallen in en krijgt er graden uit.

We hebben dit al eerder gezien in module E1 met de functies g^x en glogx.

$$\gamma = \arccos\left(\frac{7^2 + 5,8^2 - 6,5^2}{2 * 7 * 5,8}\right) = \arccos\left(\frac{49 + 33,64 - 42,25}{81,2}\right) \approx 60,17^\circ$$

Op de (grafische)rekenmachine typen we dus in: **cos⁻¹**($\frac{49+33,64-42,25}{81,2}$) **≈ 60,17°**

De hoek cos (γ) is berekend: 60,17°.

3. Sinus regel

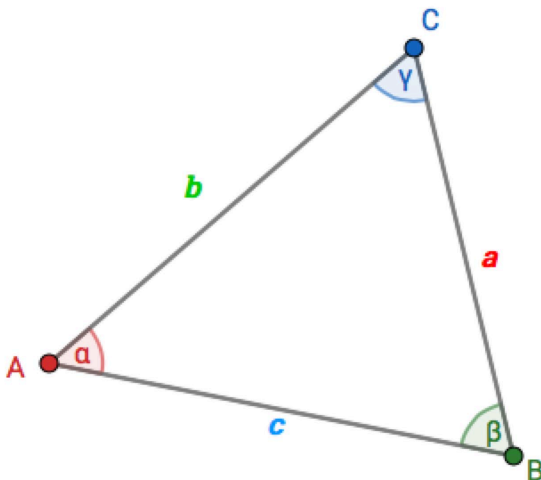
Voordat het hoofdstuk begint, doen we hier melding van de volgende (voor)kennis die gebruikt wordt:

- In elke driehoek $\triangle ABC$ met hoeken α , β en γ geldt dat de som van de hoeken gelijk is aan 180° :
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- De functies $\arccos x$ en $\arcsin x$ en $\arctan x$ worden gebruikt.
Arccos(x) is de inverse van $\cos(x)$, de functie die als het ware $\cos(x)$ opheft, het “omgekeerde” van $\cos(x)$. Je stopt er dus getallen in en krijgt er graden uit. Hetzelfde geldt voor $\arcsin(x)$.
We hebben dit al eerder gezien in module E1 met de functies g^x en $\log x$.
LET OP: Op de (grafische)rekenmachine staan de functies $\arccos$ of $\arcsin$ of $\arctan$ niet vermeld.
Ze zijn er wel. Je vindt ze onder de toetsen: $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ en $\tan^{-1}$
- **Uitspraak:**
 - α , spreek uit als alfa
 - β , spreek uit als bed ta. Spreek de d niet uit.
 - γ , spreek uit als gamma

Er zijn ook nog andere uitspraken te doen over hoeken en zijden in een willekeurige driehoek. We behandelen hier de sinusregel.

De sinusregel maakt het mogelijk om een hoek en/of zijden van een driehoek te berekenen als er een hoek met de bijbehorende overstaande zijde gegeven is. De sinusregel gaat om een verhouding tussen de sinus van een hoek en de overstaande zijde.

Hieronder (Figuur 3.1) zien we een driehoek met zijden a, b, c en de hoeken α, β en γ .



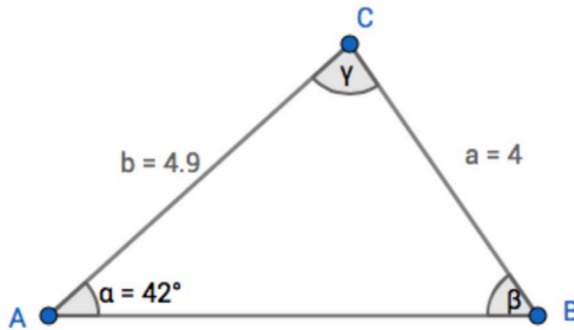
Figuur 3.1. Een driehoek $\triangle ABC$.

De **sinusregel** voor elke driehoek $\triangle ABC$ luidt als volgt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Het toepassen van de sinusregel wordt gedemonstreerd met behulp van het volgende voorbeeld (Figuur 3.2).

Geven is de driehoek ABC, waarbij **a** een lengte heeft van 4, **b** lengte van 4,9 en hoek α gelijk is aan 42° . De vraag is om alle onbekende hoeken en zijde **c** te berekenen.



Figuur 3.2. Een driehoek met een onbekende zijde AB (oftewel *c*) en de onbekende hoeken β en γ .

Als eerste kan hoek β berekend worden met de drie bekenden die gegeven zijn, want de sinusregel luidt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Waaruit de volgende formule volgt: $\sin \beta = \frac{b * \sin \alpha}{a}$

$$\text{Dus } \sin \beta = \frac{4.9 * \sin 42^\circ}{4} = \frac{4.9 * 0.669131}{4} = 0.819685475$$

Vervolgens wordt de hoek naar graden omgezet:

$$\beta = \arcsin(0.819685475) \approx 55.05^\circ$$

Op de (grafische)rekenmachine typen we dus in: $\sin^{-1}(0.819685475) \approx 55.05^\circ$

Nu dat de waarden van twee hoeken bekend zijn, kan de derde hoek berekend worden, want de drie hoeken bij elkaar zijn altijd gelijk aan 180° . Met andere woorden:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\text{Dus } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 42^\circ - 55.05^\circ = 82.95^\circ$$

Voor de bepaling van de laatste onbekende, namelijk zijde **c**, zijn nu alle gegevens beschikbaar. Het maakt niet uit of zijde **a** met de hoek $\sin \alpha$ wordt gebruikt of zijde **b** met hoek β .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Hieruit volgt de formule voor zijde **c**, bij het gebruik van zijde **a** en hoek α :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

en dus : $c = \frac{a * \sin \gamma}{\sin \alpha}$

Dan is $c = \frac{4 * \sin 82.95^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{4 * 0.992439}{0.669131} \approx 5,93$

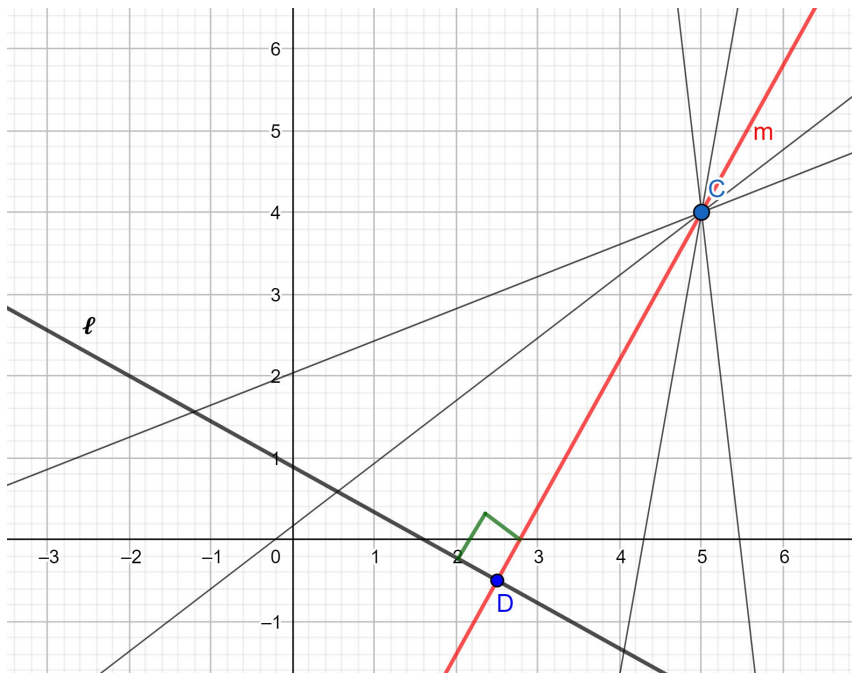
We kunnen de genomen stappen als volgt samenvatten:

- We hebben met gebruik van de sinusregel eerst de onbekende hoek β berekend, omdat de overstaande zijde bekend was.
- Vervolgens is de onbekende hoek γ berekend op basis van de kennis dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan 180° .
- En als laatste is door nogmaals de sinusregel toe te passen de onbekende zijde **c** bepaald.

4. Het berekenen van de afstand van een punt tot een lijn.

In dit onderdeel van module M1 wordt het berekenen van de afstand van een punt tot een lijn behandeld.

Hieronder (zie *Figuur 4.1*) wordt een voorbeeld van een rechte lijn ℓ en een punt C gegeven:



Figuur 4.1

Gegeven zijn lijn l : $5x + 9y = 8$ en het punt $C(5,4)$. Om een afstand tussen het punt C en lijn l te kunnen berekenen, willen we het kortste verbindingslijnstuk tussen ze leggen. Er zijn vanuit punt C een heleboel lijnen te trekken die lijn l snijden. Zo verkrijgen we heleboel lijnstukken vanuit C naar l met verschillende lengtes. Zie *Figuur 4.1*

Het blijkt echter dat het kortste lijnstuk vanuit C naar l te vinden is op lijn m vanuit het punt C dat loodrecht (hoek is gelijk aan 90°) op lijn l te tekenen is (als lijn m loodrecht op lijn l staat, noteer je het zo: $m \perp l$). Deze lijn wordt de **loodlijn** op l genoemd. Zie de rode lijn in *Figuur 4.1*. Het kortste lijnstuk is lijnstuk CD met lengte $|CD|$. Dit is dus gelijk aan de afstand tussen C en D .

De lijn m snijdt lijn l in het punt D . De afstand tussen twee punten $C(c_1, c_2)$ en $D(d_1, d_2)$ is te berekenen met behulp van de formule, zie 1.1 :

$$d(C, D) = |CD| = \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2}$$

Voordat we bovenstaande formule kunnen toepassen, moeten we natuurlijk eerst weten welk punt D is, want we kennen C al. Om achter D te komen, moeten we lijn **m** eerst snijden met lijn **l**, want D is het snijpunt van **l** en **m**.

In totaal zijn er dus 3 stappen die genomen moeten worden:

a) de vergelijking opstellen van de loodlijn **m** op **l** door het punt **C** ;

b) de coördinaten van het snijpunt **D** te bepalen.

c) de afstand berekenen tussen **C** en snijpunt **D** mbv de formule uit 1.1:

$$d(C,D) = \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2}$$

Voordat we beginnen met de berekening, maken we een uitstapje naar voorkennis die je nodig hebt bij de berekening.

Tabel Voorkennis

1. Loodrechte lijnen

Zonder bewijs vermelden we:

Als twee lijnen **m** en **l** loodrecht op elkaar staan, dan geldt voor deze lijnen:

$$rc_m \cdot rc_l = -1$$

waarbij rc_l de richtingscoëfficiënt is van lijn **l** en rc_m de richtingscoëfficiënt is van lijn **m**

Bijvoorbeeld, als lijn **m** een richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$ heeft, dan heeft lijn **l** een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{2}$, want $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

Als een lijn gegeven is in de vorm **y=ax +b**, dan is het heel makkelijk om loodlijnen te vinden, dus lijnen die loodrecht staan op deze lijn. Kies namelijk de richtingscoëfficiënt **c** van de loodlijnen zodanig dat **a*c = -1**.

Voorbeeld 1

Gegeven een lijn $\ell: y = -\frac{3}{4}x + 1$. Wat is de vergelijking van de lijn $m \perp \ell$ door het punt (3,2).

We weten al dat de richtingscoëfficiënt (rc) van m gelijk is aan $\frac{4}{3}$, want $\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1$

Dus m: $y = \frac{4}{3}x + b$. We vinden b als volgt: lijn m gaat door het punt (3,2) dus dit punt ligt op m. We vullen 3 in voor de x en 2 voor de y: $2 = \frac{4}{3} \cdot 3 + b \rightarrow 2 = 4 + b \rightarrow b = -2$

Dus de vergelijking van m is $y = \frac{4}{3}x - 2$

2. Vergelijking van lijnen

Tot nu toe hebben we steeds (zie module D1, D2) de vergelijking **y=ax +b** gebruikt om een lijn weer te geven in formulevorm.

Er is echter ook een andere vorm namelijk **mx + ny =c**. Neem bijvoorbeeld $3x + 4y = 6$.

Deze vergelijking stelt gewoon een rechte lijn voor en kan herschreven worden naar de vorm $y = ax + b$. Kijk maar: $3x + 4y = 6 \rightarrow 4y = 6 - 3x \rightarrow y = 2 - \frac{3}{4}x \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 2$

(*) In het algemeen kan men van een lijn in de vorm $mx + ny = c$ zeggen dat deze $-\frac{m}{n}$ als rc heeft. Herschrijf het zoals het voorbeeld hierboven naar de vorm $y = ax + b$. Andersom kan men een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ herschrijven naar de vorm $mx + ny = c$. Zonder verder bewijs vermelden we:

(§) De loodlijnen op een lijn $mx + ny = c$ hebben de vorm $nx - my = d$ want volgens onderdeel 1 geldt dan dat het product van de richtingscoëfficiënten gelijk moet zijn aan -1 en dat klopt.

We gebruiken (*) om de rc's te bepalen en passen de regel bij onderdeel 1 toe: $-\frac{m}{n} * -\frac{n}{-m} = -\frac{m}{n} * \frac{n}{m} = -\frac{mn}{nm} = -1$

Voorbeeld 2

Gegeven lijn ℓ : $2x + 4y = 6$ Bepaal de lijn $m \perp \ell$ door het punt $(3,2)$

Lijn m heeft volgens (§) de volgende vorm $m: 4x - 2y = d$. Het punt $(3,2)$ ligt op lijn m . Invullen van deze coördinaten geeft $4*3 - 2*2 = 12 - 4 = 8$, dus hebben we $m: 4x - 2y = 8$

3. Snijpunt bepalen van 2 lijnen

1^e manier Stel er zijn 2 verschillende lijnen die niet evenwijdig zijn $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ en $m: y = 2x - 4$. We willen het snijpunt $S(x_s, y_s)$ te weten komen. Dit snijpunt $S(x_s, y_s)$ ligt zowel op l als op m . Dat wil zeggen dat invullen van de x -coördinaat x_s in de formule van l dezelfde y -coördinaat y_s geeft als we deze x -coördinaat x_s ook invullen in de formule van m .

Maar we weten niet wat x_s is. We kunnen hierachter komen door gewoonweg de y -waarden gelijk te stellen en af te leiden welke x -waarde ervoor zorgt dat de y -waarden gelijk zijn.

Dan hebben we het snijpunt gevonden.

We stellen de y -waarden van de 2 lijnen $y = -\frac{1}{2}x + 1$ en $y = 2x - 4$ dus gelijk:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x - 4$$

$$-x + 2 = 4x - 8$$

$$5x = 10$$

En dus $x = 2$. Voor $x = 2$ hebben lijn l en m dezelfde y -waarde. Vul $x = 2$ in in de formule van beide lijnen om te checken dat het klopt, $x = 2$ geeft bij $m: y = 2*2 - 4 = 0$ en bij l krijg je hetzelfde $y = -\frac{1}{2}*2 + 1 = 0$. Het snijpunt S is dus $(2,0)$

2^e manier We hebben bij onderdeel 2 gezien dat lijnen ook in de vorm $mx + ny = c$ weergegeven kunnen worden. Stel je hebt 2 lijnen $l: x + 6y = 2$ en $m: 4x - 2y = 8$

We kunnen natuurlijk net als de 1^e manier eerst de lijnen herschrijven naar een vorm $y=ax + b$ om het snijpunt S te berekenen.
Maar het kan ook anders: We schrijven de lijnen als een stelsel vergelijkingen met 2 onbekenden x en y.

$$\begin{cases} x + 6y = 2 & | * 1 \\ 4x - 2y = 8 & | * 3 \end{cases} \quad (a)$$

De bedoeling is dat je een van de onbekenden elimineert zodat maar 1 onbekende overblijft. Dit doe je door elke vergelijking met een goed gekozen factor te vermenigvuldigen en de een bij de ander op te tellen of af te trekken.

Bij (a) vermenigvuldigen we dus de eerste vergelijking met 1 en de tweede met 3 om y te elimineren.

Nu kunnen we de eerste vergelijking bij de tweede optellen zodat y wegvalt:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \\ 12x - 6y = 24 \end{cases} \quad | \text{ optellen}$$

$$13x = 26 \rightarrow x = 2$$

Vul $x=2$ in in één van de vergelijkingen: $2 + 6y = 2 \rightarrow y = 0$

Dus het snijpunt S is (2,0)

We komen terug op de oorspronkelijk som waarmee we het hoofdstuk begonnen, zie *Figuur 4.1*.

Gegeven zijn de lijn l : $5x + 9y = 8$ en het punt C (5,4). Gevraagd wordt $d(C, l)$. Er zijn dus 3 stappen nodig om deze som op te lossen.

We beginnen met de eerste stap.

a) De vergelijking opstellen van de lijn m door het punt C .

We herschrijven l naar de vorm $y = ax + b$, met a als richtingscoëfficiënt. Dat geeft ons de mogelijkheid om de richtingscoëfficiënt van lijn l te bepalen (notatie rc_l):

$$5x + 9y = 8 \rightarrow 9y = 8 - 5x$$

$$y = \frac{8}{9} - \frac{5}{9}x \quad \text{of} \quad y = -\frac{5}{9}x + \frac{8}{9}$$

Dus $a = -\frac{5}{9}$, is de richtingscoëfficiënt van lijn l . We gebruiken de regel $rc_m \cdot rc_l = -1$ voor loodrechte lijnen uit de tabel voorkennis om de richtingscoëfficiënt rc_m van lijn m te bepalen: $\frac{9}{5}$. De vergelijking voor lijn m is dan: $y = \frac{9}{5}x + b$

Samen met het punt $C(5,4)$ is het mogelijk om de waarde van b te berekenen. We vullen de coördinaten $(5,4)$ in in de vergelijking:

$$4 = \frac{9}{5} \cdot 5 + b \rightarrow 4 = 9 + b \rightarrow 4 - 9 = b \rightarrow b = -5$$

De volledige vergelijking voor lijn m is dan: $y = \frac{9}{5}x - 5$

Of $y - \frac{9}{5}x = -5$ (vermenigvuldigen met -1) $\rightarrow \frac{9}{5}x - y = 5$
 of (door het vermenigvuldigen met 5) $9x - 5y = 25$

Merk op dat we dit kunnen checken aan de hand van (§) uit de tabel Voorkennis.

$$(\text{lijn } l): 5x + 9y = 8$$

$$(\text{lijn } m): 9x - 5y = 25$$

We hadden ook meteen lijn m kunnen opstellen als $9x - 5y = d$ en dan door het invullen van de coördinaten van punt $C(5,4)$ de waarde d kunnen uitrekenen. Zie het voorbeeld uit de tabel Voorkennis.

We gaan nu verder met stap 2 uit de berekening van $d(C, l)$.

b) de coördinaten van het snijpunt D te bepalen

We gebruiken punt 3 uit de tabel Voorkennis (snijpunten bepalen van 2 lijnen) en dan de 2^e manier om het snijpunt $D(x_s, y_s)$ te bepalen van lijn l en m .

We gaan de variabele x elimineren:

$$\begin{cases} 5x + 9y = 8 & | \cdot 9 \\ 9x - 5y = 25 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45x + 81y = 72 \\ 45x - 25y = 125 \end{cases} \quad | - \text{substractie}$$

$$45x - 45x + 81y - -25y = 72 - 125 \rightarrow 81y + 25y = -53$$

$$106y = -53 \rightarrow y = -\frac{53}{106} = -\frac{1}{2}$$

De y -coördinaat van snijpunt $D(x_s, y_s)$ is dus $\frac{1}{2}$

Vul het in een van de vergelijkingen om x te vinden oftewel de x -coördinaat x_s van $D(x_s, y_s)$:

$$5x + 9 \cdot -\frac{1}{2} = 8 \rightarrow 5x - \frac{9}{2} = 8$$

$$5x = 8 + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

$$x = \frac{25}{2} \div 5 = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2}$$

Dus het punt **D** heeft coördinaten van $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$. Het punt **C** is ons al gegeven: (5,4).

We kunnen nu stap 3 voltooien uit de berekening van $d(\mathbf{C}, l)$:

c) De afstand tussen deze twee punten kan nu berekend worden m.b.v. formule:

$$d(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = |\mathbf{CD}| = \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2}$$

$$d(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = |\mathbf{CD}| = \sqrt{(5 - \frac{5}{2})^2 + (4 + \frac{1}{2})^2}$$

$$d(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = |\mathbf{CD}| = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{9}{2})^2}$$

$$d(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = |\mathbf{CD}| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{106}{4}}$$

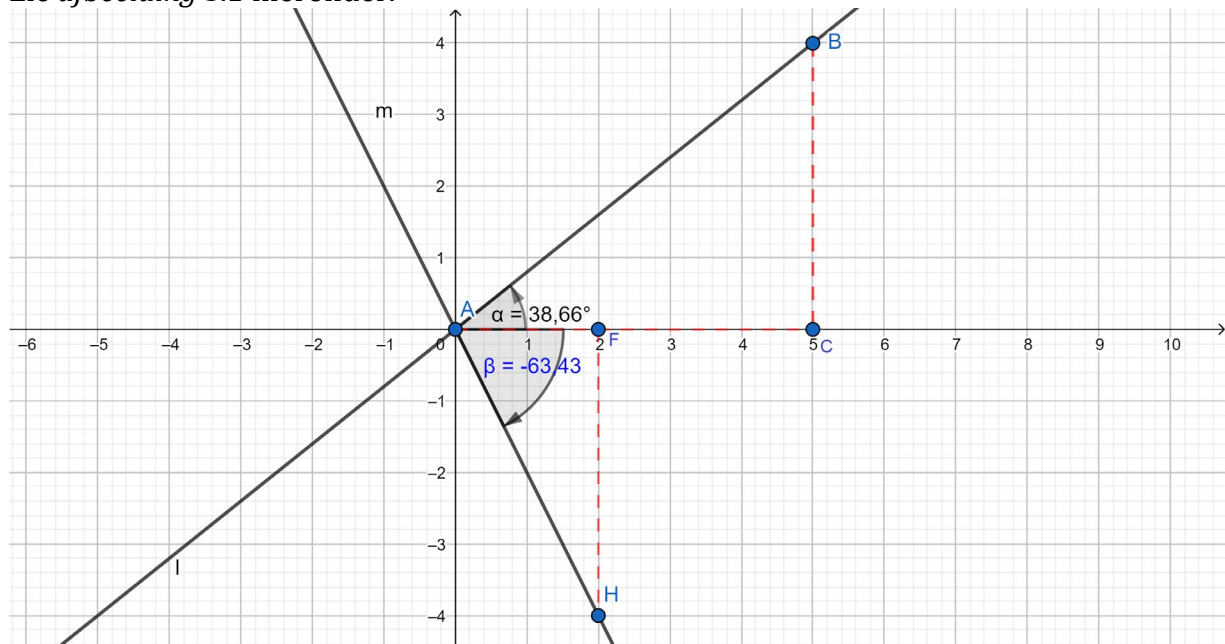
De afstand tussen punt **C** en lijn **l** is gelijk aan $\sqrt{\frac{106}{4}}$ of afgerond 5,15.

5. Hoeken tussen de lijnen

In dit onderdeel van module M1 wordt het berekenen van hoeken tussen lijnen behandeld.

We introduceren eerst een aantal begrippen en definities.

Zie *afbeelding 5.1* hieronder.



afbeelding 5.1

We noemen α de hoek van lijn l met de x-as en β de hoek van lijn m met de x-as.

We introduceren **de richtingshoek**. Deze is de hoek waarover de x-as moet draaien om samen te vallen met de lijn en geeft tevens een richting aan.

Tegen de klok in levert een positieve hoek en met de klok mee levert een negatieve hoek.

Kijken we naar *afbeelding 5.1* dan kunnen we zien dat de richtingshoek van lijn l gelijk is aan $\alpha = 38,66^\circ$ en de richtingshoek van lijn m gelijk is aan $\beta = -63,43^\circ$

De volgende afspraak geldt ook dat we voor de richtingshoek γ die een lijn met de x-as maakt, de hoek nemen die tussen -90° en 90° ligt. Dus algemeen:

Voor de richtingshoek γ van een lijn k geldt: $-90 < \gamma \leq 90^\circ$

We zien in *afbeelding 5.1* ook dat $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ rechthoekige driehoeken zijn met $\angle C = \angle E = 90^\circ$

We gebruiken de kennis van module E2 : Heb je te maken met rechthoekige driehoeken, dan geldt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} \quad (*)$$

In deze gevallen draait het altijd om positieve hoeken.

In *afbeelding 5.1* zien we dat hoek β negatief is, $\beta = -63,43^\circ$

In dat geval passen we de volgende truc toe.

We berekenen eerst de tangens van de positieve hoek $-\beta$ volgens (*) en gebruiken dan de volgende regel $\tan(-\gamma) = -\tan(\gamma)$ voor een willekeurige hoek γ

$$\tan(\beta) = \tan(-63,43^\circ) = -\tan(63,43^\circ) = -\frac{4}{2} = -\frac{4}{2}$$

Bij het berekenen van $\tan(63,43^\circ)$ gebruiken we (*). We beschouwen in dit geval dan $\triangle AFH$ als een opzichzelf staande driehoek zonder hoeken met een richting, dus met positieve hoeken.

Als we de richtingscoëfficiënten van lijn l en m berekenen, volgens de regel uit module D1:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} \quad (+)$$

dan blijken ze hetzelfde te zijn als de berekening van $\tan(\alpha)$ en $\tan(\beta)$ volgens (*)

$$\text{Volgens (+):} \quad r_{cl} = \frac{4}{5} \quad \text{en} \quad r_{cm} = -\frac{4}{2}$$

In het algemeen geldt het volgende: Hebben we een lijn k met een richtingshoek α , dan geldt:

$$\tan(\alpha) = r_k \text{ met } -90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

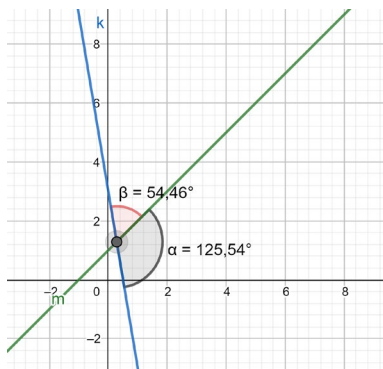
(⊙)

We kunnen nu hoeken tussen lijnen gaan berekenen.

We maken nog de volgende afspraak:

Als we spreken over een hoek γ tussen 2 lijnen, dan bedoelen we altijd die hoek γ waarvoor geldt: $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$. Je kunt ook zeggen, we nemen de kleinste hoek.

Zie *afbeelding 5.2*:



Hier is de hoek tussen lijn k en m gegeven door $\beta = 54,46^\circ$

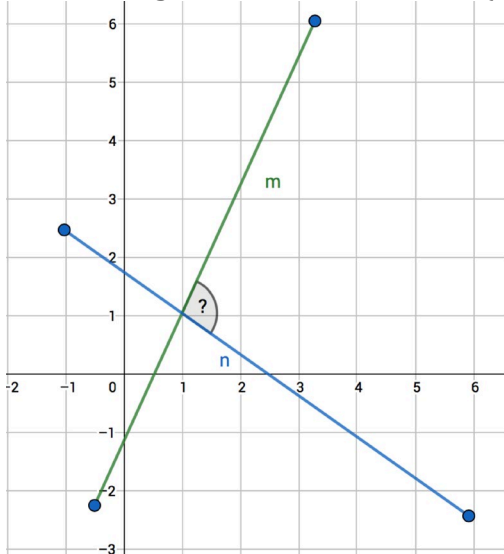
De hoek $\alpha = 125,54^\circ$ is te groot en voldoet niet.

Merk op dat $54,46^\circ = 180^\circ - 125,54^\circ$. Eigenlijk ligt dat voor de hand, want $\alpha + \beta = 180^\circ$. In het snijpunt is $\alpha + \beta$ namelijk een gestrekte hoek, gegeven door lijn k.

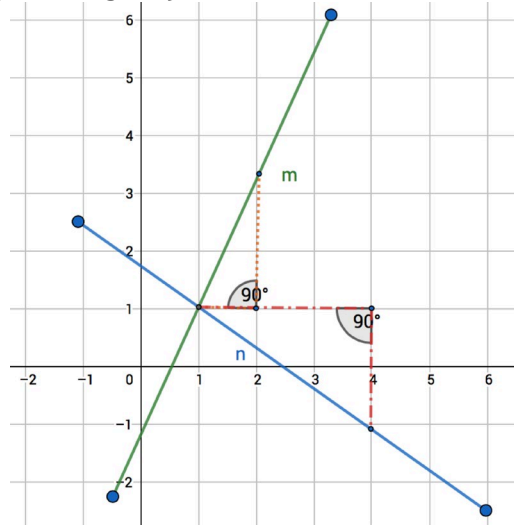
afbeelding 5.2

Er is flink wat materiaal te vinden over scherpe hoeken, rechte hoeken, stompe en gestrekte hoeken. Zie ook links op dlo

In afbeelding 5.3 hieronder, worden twee lijnen getoond met onbekende hoek γ er tussen. Voor het bepalen van deze hoek, wordt de hoek in tweeën gesplitst, zodat er twee rechthoekige driehoeken ontstaan (zie afbeelding 5.4).



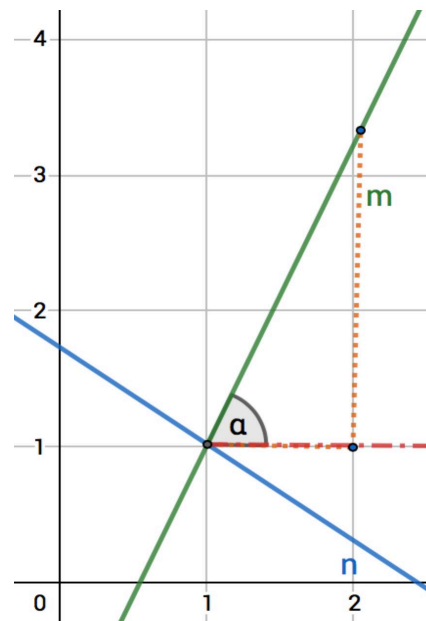
afbeelding 5.3. Gevraagd de hoek tussen twee lijnen



Afbeelding 5.4 Lijnen m (groen) en n (blauw).

De onbekende hoek γ , die nu gesplitst is in tweeën, kan nu berekend worden. We gaan het eerste gedeelte van de in tweeën gesplitste hoek γ berekenen. We hebben nu 2 richtingshoeken. We noemen het eerste deel hoek α , zie afbeelding 5.5.

Hoek α berekenen



Afbeelding 5.5. Ingezoomd op lijn m

De richtingscoëfficiënt van de lijn **m** (notatie rc_m) is namelijk 2,5 . Bij één stap naar rechts gaat hij 2,5 omhoog, zie (+).

We hebben hierboven bij (⊙) gezien dat dan geldt dat $\tan(\alpha) = rc_m$. Dus:

$$\tan(\alpha) = 2,5$$

De waarde van $\alpha = \arctan(2,5) \approx 68,2^\circ$
Typ op de (grafische) rekenmachine $\tan^{-1}(2,5)$ in

Hoek β berekenen.

Hetzelfde proces wordt toegepast voor lijn n en de onbekende hoek β (afbeelding 5.6)

Richtingshoek β is negatief.

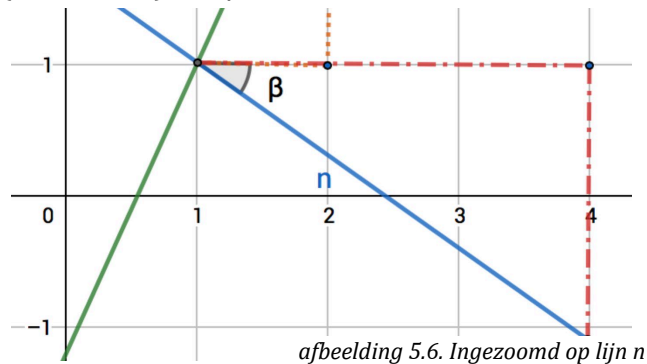
Bij 3 stappen naar rechts gaat de lijn 2 stappen omlaag

Dus de richtingscoëfficiënt van lijn n (notatie rc_n) = $-2/3$ en

volgens (⊙) is $\tan(\beta) = rc_n$

$$\tan(\beta) = -2/3.$$

$$\text{Dus } \beta = \arctan(-2/3) \approx -33,69^\circ$$



De totale waarde van de onbekende hoek γ is gelijk aan het verschil van de grootste hoek en kleinste. In dit voorbeeld is het dus:

$$\bullet \quad \alpha - \beta = 68,2^\circ - (-33,69^\circ) = 68,2^\circ + 33,69^\circ = 101,89^\circ$$

We hadden voor hoek γ het volgende afgesproken: $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ oftewel het gaat altijd om de kleinste hoek, zie uitleg bij afbeelding 5.2.

Dus is de hoek γ uiteindelijk: $180^\circ - 101,89^\circ = 78,11^\circ$

Samenvatting

Samenvattend kunnen we dus het volgende zeggen.

Als 2 lijnen k en m elkaar snijden met richtingshoek lijn k is α en richtingshoek lijn m is β .

En we nemen voor het gemak aan dat $\alpha > \beta$. Dan berekent men de hoek γ tussen deze 2 lijnen als volgt:

- $\gamma = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90^\circ$
- $\gamma = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90^\circ$
- $\tan(\alpha) = rc_k$ en $\tan(\beta) = rc_m$
- $\alpha = \arctan(rc_k)$ en $\beta = \arctan(rc_m)$

